Definición: Se define el logaritmo en base a de b $\log_a b$, como el valor c, tal que $a^c = b$; es decir:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad con \quad a > 0 \quad y \quad a \neq 1 \quad y \quad b > 0$$

Ejemplos:

1) $\log_2 64 = 6$ porque $2^6 = 64$
2) $\log_7 49 = 2$ porque $7^2 = 49$
3) $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$

Consecuencias de la definición:

1. El logaritmo de 1 siempre es 0, independientemente de la base en que se calcule; es decir: $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$
   Ejemplos:
   1) $\log_2 1 = 0$ porque $2^0 = 1$
   2) $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
2. El logaritmo de la base siempre es 1; es decir: $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$
   Ejemplos:
   1) $\log_4 4 = 1$ porque $4^1 = 4$
   2) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = 1$ porque $\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$
3. No existe el logaritmo de un número con base negativa.
4. No existe el logaritmo de un número negativo.
5. No existe el logaritmo de cero.

Se llama logaritmo decimal, al logaritmo en base 10. En el logaritmo decimal, no se escribe la base: $\log_{10} a = \log a$

Se llama logaritmo neperiano, al logaritmo en base e. En el logaritmo neperiano, no se escribe log, sino ln: $\log_e a = \ln a$

Ejercicios:

1) Calcula los siguientes logaritmos:

1) $\log_6 36$	2) $\log_9 3$	3) $\log_4 8$	4) $\log_4 8$
5) $\log_2 \frac{4}{\sqrt[5]{2}}$	6) $\log_8 \sqrt[4]{2}$	7) $\log_{3\sqrt{3}} \sqrt[5]{9}$	8) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{9}{\sqrt[5]{3}}$
9) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$	10) $\log_5 125^{2/3}$	11) $\log\left(\frac{1}{0{,}001^{-3}}\right)$	12) $\log_6 \sqrt[4]{216}$
13) $\log_{\sqrt[5]{3}} \frac{\sqrt{3}}{9}$	14) $\log_{\sqrt[5]{27}} \frac{\sqrt{3}}{81}$	15) $\log_5 \frac{\sqrt[4]{125}}{25}$	16) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{9\cdot\sqrt[5]{81}}{\sqrt{27}}$

2) Calcula el valor de las siguientes expresiones:

1) $\log_2 32 + \log_3 81 - \log_5 125$

2) $\log 100 + \log 0,01 + \log 0,1$

3) $2 - \log_4 16 + \log_2 8 - 3\log_7 49$

4) $\log_8 \left[\log_4\left(\log_2 16\right)\right]$

4) $\log_2 \sqrt[3]{16} + \log_3\left(27\cdot\sqrt{3}\right)$

5) $\log_2 \sqrt[4]{8} + \log_3\left(9\cdot\sqrt[3]{3}\right) - \log_5\left(\dfrac{\sqrt{5}}{25}\right) - \dfrac{\log_7 49}{\log_7 \sqrt{7}}$

6) $\log_4\left[\log_2\left(\log_3 81\right)\right]$

7) $\log_5\left[\left(\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)^2 + 10\cdot\log_4\sqrt{4} - 1\right]$

8) $\dfrac{\log_2 16}{\log_2 \sqrt{2}} + \log_3 \sqrt[3]{81} - \left(\log_5 25\right)\cdot\left(\log_5 \sqrt{5}\right)$

3) Calcula x en los siguientes casos aplicando la definición de logaritmo:

1) $\log_5 x = 2$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$ 3) $\log_4 x = \dfrac{1}{2}$ 4) $\log_x 16 = 2$

5) $\log_x 10 = \dfrac{1}{4}$ 6) $\log_x 125 = -3$ 7) $\log_x 3 = \dfrac{1}{3}$ 8) $\log_3 x=4$

9) $\log x=3$ 10) $\log_{1/2} x=-3$ 11) $\log x=-2$ 12) $\ln x=2/3$

13) $\log_x 125 = 3$ 14) $\log_x 25 = -2$ 15) $\log_x 81 = 4$ 16) $\log_x 64 = 3$

17) $\log_x 1/4 = 2$ 18) $\log_x 2 = 1/2$ 19) $\log_x 4 = -1/2$ 20) $\log_x 0,04 = -2$

Propiedades de los logaritmos:

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos; es decir:
$\log_a(b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$
2. El logaritmo de un conciente es igual a la diferencia de los logaritmos; es decir:
$\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
3. El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base, es decir:
$\log_a\left(b\right)^n = n\cdot\log_a b$
4. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando partido por el índice de la raíz; es decir: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}.\log_a b$

3) Calcula el valor de log x en las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log x = 3\cdot\log 2 - 2\cdot\log 3 + \log 5$

b) $\log_2 x = 2\cdot\log_2 5 - 3\cdot\log_2 3 + \dfrac{\log_2 27}{3} + 2$

c) $\log x = 3\cdot\log 2 - 2\cdot\log 5 + 2 - \dfrac{1}{6}.\log 64$

d) $\log x = \dfrac{1}{2}(\log 9 - \log 36 - \log 4)$